# XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
# Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

## I. forduló - 9. osztály

1. **feladat:**

Két játékos a következő játékot játssza: Az $1, 2, 3, \ldots, 2017$ véges számsorozatból váltakozva kiválasztanak egy-egy számot, és azt törlik a sorozatból. Bármelyikük látja, hogy milyen számot választott a másik. Mindketten feljegyzik a füzetükbe az általuk kiválasztott számokat. A játék akkor ér véget, amikor a megadott számsorozatban már nem marad szám. A játékot az a játékos nyeri meg, aki által kiválasztott számok összege nem osztható 3-mal. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája? Valamelyik játékos nyerő stratégiája azt jelenti, hogy függetlenül az ellenfél lépéseitől, az illető játékos nyer.

*Szilágyi Judit, Kolozsvár, Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy*

**Megoldás:**

A kezdőjátékost nevezzük $A$ – nak, a másikat $B$ – nek. Vegyük észre, hogy a megadott számsorozatban 673 darab $3k+1$ alakú, 672 darab $3k$ alakú, illetve 672 darab $3k+2$ alakú szám van. (1)

$A$ – nak van nyerő stratégiája és ez a következő:

Első választása egy $3k+1$ alakú szám. Ezzel a választással eléri, hogy úgy a $3k$, mint a $3k+1$, illetve $3k+2$ alakú számokból ugyanannyi, 672 darab marad a sorozatban.

Ettől kezdve amilyen típusú számot választ a második játékos, ugyan olyan típusút választ ő is. Mivel mindhárom típusból páros számú van, a játék végén a $B$ játékosnak 336 darabja lesz mindegyik típusú számból, az $A$ játékosnak pedig a $3k$ és $3k+2$ alakú számokból 336 a $3k+1$ alakúból pedig 337 darab szám lesz.

Így a $B$ játékos számainak összege 3 többszöröse, az $A$ játékosé pedig $3k+1$ alakú, vagyis nem osztható 3-mal. Tehát, bárhogy is játsszon a $B$ játékos, ezzel a stratégiával az $A$ játékos nyer.

# XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
# Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

## I. forduló - 9. osztály

**2. feladat:**

Az $ABC$ hegyesszögű háromszögben, melyben $m(ABC\measuredangle) = 75°$. Legyen $M \in (BC)$ úgy, hogy $AM \perp BC$, valamint $N \in (AC)$ úgy, hogy $\frac{AN}{NC} = \frac{AM}{MC}$. Az $(MN$ félegyenesen jelöljük $O$ – val azt a pontot, melyre $MO = \frac{1}{2}AB$.

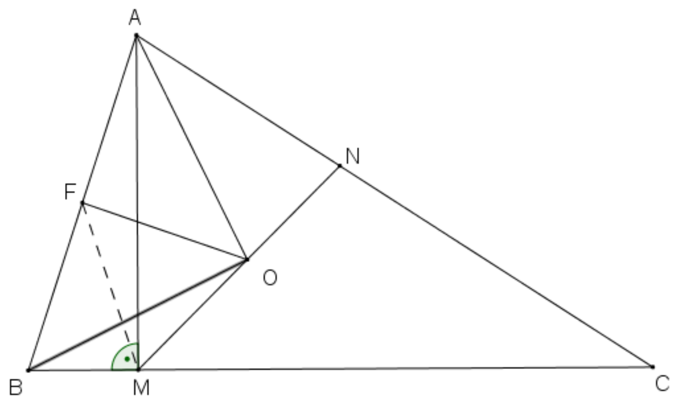
a) Igazold, hogy $m(AOB\measuredangle) = 90°$.

b) Jelölje $F$ az AB szakasz felezőpontját. Bizonyítsd be, hogy $OF \perp AB$.

*Bíró Béla, Sepsziszentgyörgy*

**Megoldás**:

A bizonyítási gondolatmenet leírásához használjuk a mellékelt ábrát!




a) Mivel $m(ABC) = 75°$ és $m(AMB) = 90°$ ezért a $m(BAM) = 15°$

Tekintsük az $FOM$ háromszöget, melyről kimutatjuk, hogy egyenlő oldalú.

Valóban: a feltevés alapján $MF$ az $ABM$ derékszögű háromszög átfogójához tartozó oldalfelező.

Ezért $FM = AF = FB$. (2)

(1)és **(2)**$\Rightarrow$ $m(FMA\measuredangle) = m(FAM\measuredangle) = 15°$ (3)

A feladatban adott aránypárból, a szögfelező tétele alapján, következik, hogy az $(MN$ félegyenes az $AMC\measuredangle$ szögfelezője, ezért $m(AMO\measuredangle) = 45°$**.** (4)

**(3)** és **(4)** $m(FMO\measuredangle) = m(FMA\measuredangle) + m(AMO\measuredangle) = 15° + 45° = 60°$ (5)

# XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
# Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

## I. forduló - 9. osztály

Másrészt a feladat egyik feltevése alapján $MO = \frac{1}{2}AB = FB$. **(6)**

A (2) – es, (5) – ös és (6) – os egybevetéséből adódik, hogy az $FMO_{\triangle}$ egyenlő oldalú, ezért $FO = FM = FB = FA$, (7) vagyis az *A*, *O* és *B* pontok egy *F* középpontú és *AB* átmérőjű körön vannak. Innen adódik, hogy az $AOB\measuredangle$ félkörbe írt kerületi szög, tehát derékszög. Ezzel az a) alpont állítását igazoltuk.

b) Másrészt*:* Abból, hogy $m(AMB\measuredangle) = 90°$ és $m(AOB\measuredangle) = 90°$, adódik, hogy $AOMB$ húrnégyszög. Emiatt $m(BAM\measuredangle) = m(BOM\measuredangle) = 15°$ (lásd (1) - et)

A $BOM_{\triangle}$ háromszög szögeinek mértékét vizsgálva, az eddig megszerzett információk alapján következik, hogy $m(OBM\measuredangle) = 30°$. Ezt egybevetve azzal, hogy az *AOMB* négyszög körbeírható, kapjuk, hogy $m(OAM\measuredangle) = m(OBM\measuredangle) = 30°$. (8)

(1) és (8) $\Rightarrow$ $m(FAO\measuredangle) = 15° + 30° = 45°$ (9)

(7) $\Rightarrow FO = FA$, amit (9) - cel egybe vetve, kapjuk, hogy

$m(FAO\measuredangle) = m(FOA\measuredangle) = 45°$ és $m(AFO\measuredangle) = 90°$, azaz $OF \perp AB$.

# XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
# Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

## I. forduló - 9. osztály

**3. feladat:**

Adott az $M=\{x^2+2^y \mid x,y\in\mathbb{N}\}$ halmaz. Igazold, hogy az $M$ halmaz elemei között nincsenek 7-tel osztható egész számok.

*Jakab Tibor, Sepsziszentgyörgy*

**Megoldás:**

Megmutatjuk, hogy $(x^2+2^y)$ nem osztható 7-el, $\forall x,y\in N$ esetén. Az $M$ halmaz egyetlen eleme sem osztható 7-el.

Írható, hogy $x^2\equiv 0,1,2,4 (\text{mod}\, 7)$, az $x^2$ szám 7-el való osztási maradéka $0,1,2,4$ lehet, mert $x=7k+r$ alakú, ahol $r\in\{0,1,2,3,4,5,6\}$

Hasonlóan, $2^y\equiv 1,2,4 (\text{mod}\, 7)$, a $2^y$ alakú számok 7-el való osztási maradékai 3 periódussal ismétlődnek, mert $2^{k+3}-2^k=2^k(2^3-1)=7\cdot 2^k$ osztható 7-el.

Elkészítünk egy táblázatot az $(x^2+2^y)$ szám 7-el való osztási maradékaira.

| $2^y$ maradékai (->)<br>$x^2$ maradékai (alább) | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 4 |
| 1 | 2 | 3 | 5 |
| 2 | 3 | 4 | 6 |
| 4 | 5 | 6 | 1 |

A táblázatban feltüntettük az $(x^2+2^y)$ szám 7-el való osztási maradékait. Mivel itt nem szerepel a 0, következik, hogy $(x^2+2^y)$ nem osztható 7-el, $\forall x,y\in N$ esetén.

# XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
# Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

## I. forduló - 9. osztály

**4. feladat:**

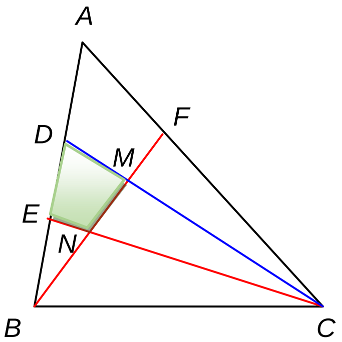
Az $ABC\triangle$-ben $D,E\in(AB)$ úgy, hogy $[AD]\equiv[DE]\equiv[EB]$ és $F\in(AC)$ úgy, hogy $AF=\frac{1}{3}AC$.

Legyen $BF\cap CD=\{M\}$, $BF\cap CE=\{N\}$.

Igazold, hogy $\frac{T_{DENM}}{T_{CDE}}=\frac{5}{14}$.

*Simon József, Csíkszereda*

**Megoldás:**




Szükségünk lesz a $\frac{CN}{CE}$, $\frac{CM}{CD}$ arányokra, amelyeket Menelaosz tételének alkalmazásával kapunk meg.

Az $AEC\triangle$ és $B$, $N$, $F$ kollineáris pontok esetén Menelaosz tétel alkalmazásával $\frac{BA}{BE}\cdot\frac{FC}{FA}\cdot\frac{NE}{NC}=1 \Rightarrow \frac{3}{1}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{NE}{NC}=1 \Rightarrow$ $\frac{NC}{NE}=6 \Rightarrow \frac{CN}{CE}=\frac{6}{7}$. (1)

Az $ADC\triangle$ és $B$, $M$, $F$ kollineáris pontok esetén Menelaosz tétel alkalmazásával $\frac{BA}{BD}\cdot\frac{FC}{FA}\cdot\frac{MD}{MC}=1 \Rightarrow \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{MD}{MC}=1 \Rightarrow \frac{MC}{MD}=3 \Rightarrow \frac{CM}{CD}=\frac{3}{4}$. (2)

Az (1) és (2) felhasználásával $\Rightarrow \frac{T_{CMN}}{T_{CDE}}=\frac{CM\cdot CN\cdot\sin(DCE)\cdot\frac{1}{2}}{CD\cdot CE\cdot\sin(DCE)\cdot\frac{1}{2}}=\frac{CM}{CD}\cdot\frac{CN}{CE}=\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{7}=\frac{9}{14}$.

Ugyanakkor $T_{DENM}=T_{DEC}-T_{CMN}$, ahonnan $\frac{T_{DENM}}{T_{DEC}}=\frac{5}{14}$.

# XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
# Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

## I. forduló - 9. osztály

**5. feladat:**

Határozd meg azokat az $x$ irracionális számokat, amelyekre $x(x+1)$ és $x^2(x+2)$ egész számok.

*dr. Bencze Mihály, Bukarest*

**Megoldás:**

Legyen $x(x+1)=a$ és $x^2(x+2)=b$, kijelent szerint $a,b\in\mathbb{Z}$.

A fenti összefüggésekből $x^2=a-x$ és $x\cdot x^2+2(a-x)=b$

$\Rightarrow x(a-x)+2a-2x=b \Rightarrow ax-x^2+2a-2x=b \Rightarrow ax-a+x+2a-2x=b \Rightarrow ax-x+a=b$

$\Rightarrow x(a-1)=b-a$.

1) Ha $a\neq 1 \Rightarrow a-1\neq 0 \Rightarrow x=\dfrac{b-a}{a-1}$, hamis mert $x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ és $\dfrac{b-a}{a-1}\in\mathbb{Q}$

2) Ha $a=1 \Rightarrow 0=b-a \Rightarrow a=b=1,\ x^2+x-1=0 \Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, és mivel ezek irracionálisak, ezért éppen ezek a megoldások.

Ellenőrizzük, hogy ezekre az $x$ értékekre $a,b\in\mathbb{Z}$.

**6. feladat:**

Hányféleképpen lehet megadni három pozitív egész számot, melyekre $a<b<c$ és $abc=30030$ teljesül?

*Róka Sándor, Nyíregyháza*

**Megoldás:**

$30030=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13$ miatt nekünk 6 prímszámot (a 2, 3, 5, 7, 11 és 13 számokat) kell három halmazba szétosztani, és így adjuk meg az *a, b, c* számok prímtényezőit.

Ez a szétosztás $3^6$-féleképp történhet, hiszen a hat prím mindegyikénél 3 választási lehetőség van: az első, a második vagy a harmadik halmazba tesszük őt.

# XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
# Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

## I. forduló - 9. osztály

Ezen szétosztások közül hármat kiveszünk, azokat amelyeknél mind a hat prím ugyanabba a halmazba került, az 1., a 2. vagy a 3. halmazba: ekkor az *a, b, c* számok egyike 30030, a másik kettő pedig 1.

Egy szétosztás esetén az 1., 2. és 3. halmazok sorrendjét megváltoztatva másik szétosztást kapunk, összesen $3! = 6$-féle sorrend van. Ezek közül csak egyet számolunk, amikor teljesül az $a < b < c$ sorrend. Emiatt a keresett $\{a, b, c\}$ számhármasok száma $\frac{3^6 - 3}{6} = 121$.