XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

I. forduló - 10. osztály

1. feladat:

Igazold, hogy $n^4 + 89n^2 + 2027$ nem írható fel két prímszám összegeként egyetlen $n \in \mathbb{N}$ esetén se!

Dr. Bencze Mihály, Bukarest,

Dávid Géza, Székelyudvarhely

Megoldás:

A $n^4 + 89n^2 + 2027$ páratlan minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, tehát, ha felírható két prímszám összegeként, akkor az egyik pímszám 2 kell legyen.

Ezért $n^4 + 89n^2 + 2025$ prímszám kell legyen, ami ellentmondás, mert

$$n^4 + 89n^2 + 2025 = \left(n^2 + 45\right)^2 - n^2 = \left(n^2 - n + 45\right)\left(n^2 + n + 45\right),$$

ahol mindkét tényező nagyobb, mint 1 bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén.

2. **feladat:**

Az első 1000 pozitív egész szám között hány olyan szám van, amelyeknek a pozitív osztóinak összege páratlan?

Róka Sándor, Nyíregyháza

Megoldás.

Egy páratlan *n* szám minden osztója páratlan.

Ezen páratlan osztók összege akkor lesz páratlan, ha páratlan sok számot adunk össze. Mint tudjuk, a négyzetszámoknak és csakis nekik van páratlan számú osztója. Tehát a páratlan számok közül a négyzetszámok azok, melyek osztóinak összege páratlan.

Az $n = 2^k \cdot m$ páros szám (ahol *m* páratlan) páros osztóinak összege páros, így *n* osztóinak összege akkor páratlan, ha a páratlan osztók összege páratlan, azaz a páratlan osztók száma páratlan. Az *n* páratlan osztói azonosak *m* osztóival. Az előbb már láttuk, ez azt jelenti, hogy az *m* páratlan szám négyzetszám, $m = b^2$, tehát $n = 2^k \cdot m = 2^k \cdot b^2$.

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

I. forduló - 10. osztály

Ha a 2-hatványból a 2-es tényezőket párosával kiemeljük, akkor *n* vagy az $n = a^2$, vagy $n = 2a^2$ alakot ölti.

Azt kaptuk, hogy az a^2 és a $2a^2$ alakú számok azok, melyek osztóinak összege páratlan. 1000-ig 31 négyzetszám van, és 22 olyan szám, mely $2a^2$ alakú. A keresett számok száma $31 + 22 = 53$.

3. **feladat:**

Adott kilenc, páronként különböző pozitív egész szám, melyeknek összege 130. Igazold, hogy létezik közöttük négy olyan, melyeknek összege legalább 70.

Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy

Megoldás:

A számokat nagybetűkkel jelölve, állítsuk növekvő sorrendbe:

$A < B < C < D < E < F < G < H < I$

Ismert, hogy

$A + B + C + D + E + F + G + H + I = 130$

A középső számra összpontosítva, két esetet különböztetünk meg:

1) Ha az E pozitív egész szám legalább 15, akkor az $F + G + H + I$ összeg legalább $16 + 17 + 18 + 19 = 70$, ami a feladat állítását bizonyítja.
2) Ha az E pozitív egész szám legfennebb 14 akkor az $A + B + C + D + E$ összeg legfennebb $10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 60$. Így a többi négy szám összege, vagyis $F + G + H + I$ most is legalább $130 - 60 = 70$.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

4. **feladat:**

Az $ABCD$ konvex négyszög oldalaira kivülről megszerkesztjük az ABR, BCT, DCS és APD egyenlőoldalú háromszögeket. Legyen Q az AS és PC szakaszok, O pedig az AT és RC szakaszok metszéspontja. Igazold, hogy:

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

I. forduló - 10. osztály

a) $\frac{PC}{RC}+\frac{AT}{AS}\geq 2$

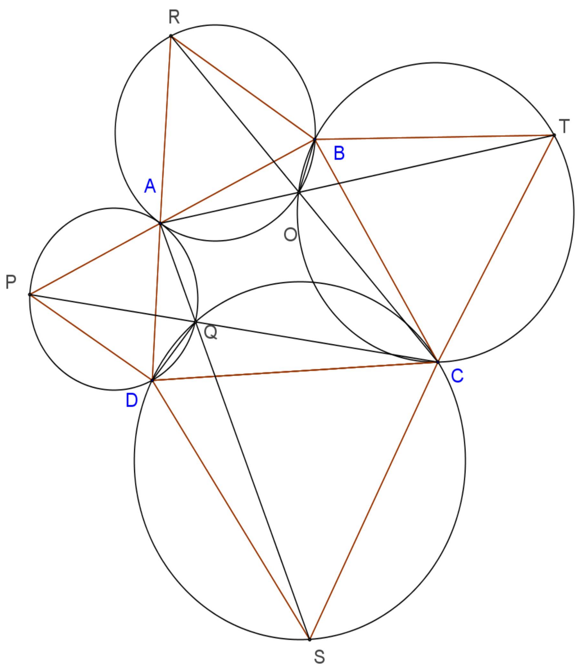
b) $AQ+2DQ+QC=PQ+QS$ és $AO+2BO+OC=RO+OT$

c) $T_{AQCO}=\frac{\sqrt{3}}{4}(AQ\cdot QC+AO\cdot OC)$

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

Megoldás:

a) $m(\widehat{PDC})=m(\widehat{ADS})=60°+m(\widehat{ADC})$ $PD=AD$ és $DC=DS$. Tehát az ADS és PDC háromszögek kongruensek, ezért $PC=AS=a$. Hasonlóan igazoljuk, hogy $RC=AT=b$. Ezért



$$\frac{PC}{RC}+\frac{AT}{AS}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=2$$

b) Induljunk ki a négyszögből és a megszerkesztett háromszögekből. Legyenek Q és O az ABR és BTC háromszögek, illetve az APD és DCS háromszögek köré írt körök második metszéspontjai. Akkor $m(\widehat{DQS})=m(\widehat{DCS})=60°$

$m(\widehat{DQP})=m(\widehat{DAP})=60°$ és $m(\widehat{PQA})=m(\widehat{PDA})=60°$. Tehát az A, Q, S pontok kollineárisak. Hasonlóan történik a P, Q, C pontok, az R, O, C pontok és A, O, T pontok kollinearitásának bizonyítása is.

Továbbá alkalmazzuk a Van Schooten tételt : ” Legyen P egy tetszőleges pont az ABC egyenlőoldalú háromszög köré írt körön. Ha P az A ponttól van a legtávolabb, akkor $PA=PB+PC$”, melyet az alábbiakban bizonyítunk:

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

I. forduló - 10. osztály

Alkalmazzuk Ptolemaiosz tételét az $ABPC$ körbeírható négyszögben:

$AP \cdot BC = AB \cdot PC + PB \cdot AC$. De a háromszög egyenlő oldalú, ezért azonnal következik, hogy $PA = PB + PC$.

Alkalmazzuk a fenti megállapítást az $AOBR$, $BOCT$, $APDQ$ és $QDSC$ körbeírható négyszögekre:

$PQ = AQ + QD$ (1)

$SQ = DQ + QC$ (2)

$OT = BO + OC$ (3)

$RO = BO + AO$ (4)

Ha összeadjuk az (1). és (2). , illetve a (3). és (4). összefüggéseket következik

$AQ + 2DQ + QC = PQ + QS$ és $AO + 2BO + OC = RO + OT$

c) $m(\widehat{PQS}) = m(\widehat{PQD}) + m(\widehat{DQS}) = m(\widehat{PAD}) + m(\widehat{DCS}) = 60° + 60° = 120°$. Hasonlóan igazoljuk, hogy $m(\widehat{AOC}) = 120°$.

Akkor $T_{AQCO} = T_{AQC} + T_{AOC} = \dfrac{AQ \cdot QC \cdot \sin 120°}{2} + \dfrac{AO \cdot OC \cdot \sin 120°}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(AQ \cdot QC + AO \cdot OC\right)$

.

5. feladat:

Az *ABC* háromszög *C* csúcsán átmenő kör az *AB* oldalt a *D* pontban érinti, ahol *D* felezi a háromszög oldalát. A kör az *AC* és *BC* oldalakat az *M* és *N* pontban metszi, továbbá $AC : BC = 3 : 2$. Mekkora az *ADM* és a *DBN* háromszögek területének aránya?

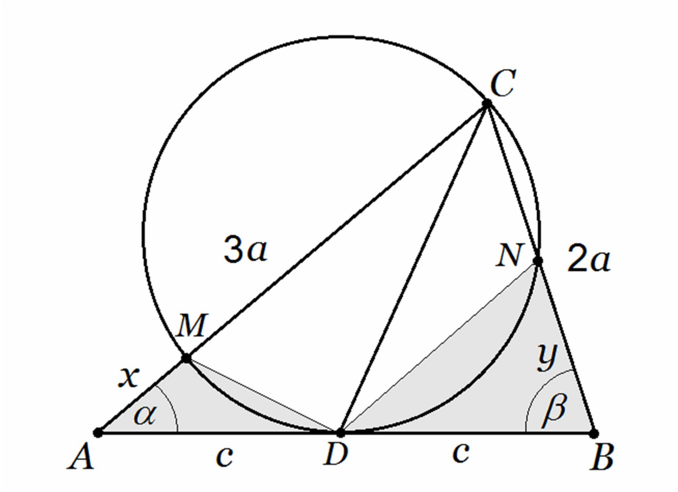
Róka Sándor, Nyíregyháza

Megoldás.

Az $AC : BC = 3 : 2$ arány miatt legyen $AC = 3a,\ BC = 2a$. Legyen $AM = x$, $BN = y$, és $AD = DB = c$; $m\left(\widehat{CAB}\right) = \alpha$ és. $m\left(\widehat{ABC}\right) = \beta$ (Lásd az ábrát.)

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

I. forduló - 10. osztály



Az ADM és a DBN háromszögek területének aránya: $\frac{T_{ADM}}{T_{DBN}} = \frac{(1/2)x \cdot c \cdot \sin\alpha}{(1/2)y \cdot c \cdot \sin\beta} = \frac{x \cdot \sin\alpha}{y \cdot \sin\beta}$.

A szinusztétel miatt $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{2}{3}$.

Az $ADM_\triangle \sim ACD_\triangle$ és az $BDN_\triangle \sim CDB_\triangle$ hasonlóságokból kapjuk, hogy: $3a \cdot x = c^2 = 2a \cdot y$,

így $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$.

Ezek alapján $\frac{T_{ADM}}{T_{DBN}} = \frac{(1/2)x \cdot c \cdot \sin\alpha}{(1/2)y \cdot c \cdot \sin\beta} = \frac{x \cdot \sin\alpha}{y \cdot \sin\beta} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$.

6. **feladat:**

Igazold, hogy ha az a, b, c oldalhosszú ABC háromszög területe $T = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{abc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$,

akkor a háromszög derékszögű!

Iakab Tibor, Sepsiszentgyörgy

1. Megoldás

Irható, hogy $T = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \Leftrightarrow \frac{abc}{4R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

I. forduló - 10. osztály

a $T=\dfrac{abc}{4R}$ képletet használtuk) $\Leftrightarrow$ $\sqrt{a^2+b^2+c^2}=2\sqrt{2}R \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=8R^2 \Leftrightarrow$

$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2$,

az $a=2R\sin A$ képletet használtuk)

$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2 \Leftrightarrow$

$\sum(1-\cos 2A)=4$,

a $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ képletet használtuk) $\Leftrightarrow$

$3-(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)=4 \Leftrightarrow \cos 2A+\cos 2B+\cos 2C+1=0 \Leftrightarrow$

$(\cos 2A+\cos 2B)+(\cos 2C+1)=0$,

a tagokat csoportosítottuk) $\Leftrightarrow$

$2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2 C=0$,

a $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ és $\cos p+\cos q$ képleteket használtuk) $\Leftrightarrow$

$\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos^2(A+B)=0 \Leftrightarrow$

$\cos(A+B)[\cos(A-B)+\cos(A+B)]=0 \Leftrightarrow$

$2\cos(A+B)\cos A\cos B=0 \Leftrightarrow$

$\cos A\cos B\cos C=0$ $\Leftrightarrow$ az ABC háromszög derékszögű.

2. Megoldás

Adható egy kevésbé elegáns megoldás is, amelyben felhasználjuk az $16T^2=2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4$ egyenlőséget. Ezt Heron képletéből kaphatjuk meg.

A feladatbeli egyenlőség így irható

$$T=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \Leftrightarrow 2T^2\left(a^2+b^2+c^2\right)=a^2b^2c^2 \Leftrightarrow$$

$16T^2\left(a^2+b^2+c^2\right)=8a^2b^2c^2 \Leftrightarrow \ldots$ (elvégezzük a szorzásokat) $\Leftrightarrow$

$$a^4b^2+a^2b^4+a^4c^2+a^2c^4+b^4c^2+b^2c^4-a^6-b^6-c^6-2a^2b^2c^2=0 \quad \Leftrightarrow$$

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

I. forduló - 10. osztály

$a^4(b^2+c^2-a^2)+2b^2c^2(b^2+c^2-a^2)-b^4(b^2+c^2-a^2)-c^4(b^2+c^2-a^2)=0 \quad \Leftrightarrow$

$(b^2+c^2-a^2)\left[a^4-(b^2-c^2)^2\right]=0 \quad \Leftrightarrow$

$(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=0 \Leftrightarrow$ az ABC háromszög derékszögű.

Megjegyzés: Kezdetben úgy csoportosítjuk a tagokat, hogy tudjuk kiemelni a $(b^2+c^2-a^2)$ tényezőt.