XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

I. forduló – 11-12. osztály

1. feladat: Oldd meg a valós számok halmazán az $\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=y^2+1 \\ y+\dfrac{1}{y}=z^2+1 \\ z+\dfrac{1}{z}=x^2+1 \end{cases}$ egyenletrendszert!

Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy

Megoldás:

Az egyenletrendszer egyenértékű az $\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x}=y^2+1 \text{ (1)} \\ \dfrac{y^2+1}{y}=z^2+1 \text{ (2)} \\ \dfrac{z^2+1}{z}=x^2+1 \text{ (3)} \end{cases}$ és $x\neq 0, y\neq 0, z\neq 0$ egyenletrendszerrel.

Ezek az egyenlőségek csak akkor teljesülnek, ha $x>0, y>0$ és $z>0$. Ennek figyelembe vételével és a számtani – mértani közepekre vonatkozó egyenlőtlenségek alkalmazásával írhatjuk, hogy $x+\frac{1}{x}\geq 2$, $y+\frac{1}{y}\geq 2$, $z+\frac{1}{z}\geq 2$.(4)

Az $(1),(2),(3)$és(4) egybevetésével kapjuk, hogy $x^2+1\geq 2$, $y^2+1\geq 2$, $z^2+1\geq 2$. Innen pedig $x\geq 1, y\geq 1$ és $z\geq 1$ (5).

Másrészt: az egyenletek megfelelő oldalainak összeszorzásával, egyszerűsítés után, kapjuk, hogy $x\cdot y\cdot z=1$ (6).

Az (5) és (6) együttes hatása miatt csak az $x=y=z=1$ jöhet számításba.

Megfordítva: közvetlenül ellenőrizhető, hogy az $(1,1,1)$ számhármas kielégíti a rendszer minden egyenletét.

Tehát az adott egyenletrendszernek egyetlen megoldása van, éspedig az $(1,1,1)$ számhármas.

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

I. forduló – 11-12. osztály

2. feladat: Igazold, hogy $2\sum_{n=1}^{2017} n\cdot 2^n + 2018\cdot 2^{2018}$ osztható 2017-tel!

Komán Zsombor, Brassó

Megoldás:

Indukcióval igazolható, hogy $\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^k = (n-1)2^{n+1}+2, \forall n\in\mathbb{N}^*$ esetén.

Ahonnan

$$2\sum_{n=1}^{2017} n\cdot 2^n + 2018\cdot 2^{2018} = 2\left(2016\cdot 2^{2018}+2\right)+2018\cdot 2^{2018} = 2016\cdot 2^{2019}+2018\cdot 2^{2018}+4 =$$

$$=(2017-1)\cdot 2^{2019}+2018\cdot 2^{2018}+4 = 2017\cdot 2^{2019}-2^{2019}+2018\cdot 2^{2018}+4 =$$

$$=2017\cdot 2^{2019}+2016\cdot 2^{2018}+4 = 2017\cdot 2^{2019}+2017\cdot 2^{2018}-2^{2018}+4 =$$

$$=2017\cdot 2^{2019}+2017\cdot 2^{2018}-4\cdot\left(2^{2016}-1\right).$$

Mivel az összeg első két tagja osztható 2017-tel, csak azt kell bizonyítani, hogy $2^{2016}-1$ osztható 2017-tel, amely a kis Fermat-tétel alapján igaz.

Megjegyzés:

1. Legyen $S=\sum_{k=1}^{n} k\cdot x^k = 1\cdot x+2\cdot x^2+3\cdot x^3+\ldots+n\cdot x^n$, akkor

$xS = 1\cdot x^2+2\cdot x^3+3\cdot x^4+\ldots+n\cdot x^{n+1}$. A két egyenlőséget kivonva egymásból következik,

hogy $(1-x)S = x+x^2+x^3+\ldots+x^n-n\cdot x^{n+1} = x\cdot\frac{1-x^n}{1-x}-n\cdot x^{n+1} = \frac{n\cdot x^{n+2}-(n+1)\cdot x^{n+1}+x}{1-x}$

ahonnan $S=\frac{n\cdot x^{n+2}-(n+1)\cdot x^{n+1}+x}{(1-x)^2}$.

2. $S=\sum_{k=1}^{n} k\cdot x^k = x\cdot\sum_{k=1}^{n} k\cdot x^{k-1} = x\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right)' = x\cdot\left(\frac{x^n-1}{x-1}\right)' = \frac{n\cdot x^{n+2}-(n+1)\cdot x^{n+1}+x}{(x-1)^2}$

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

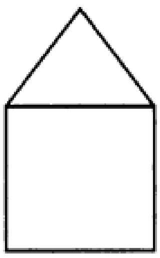
I. forduló – 11-12. osztály

3. feladat: Szabályos háromszöglapokból és négyzetlapokból *n* oldalú sokszögeket rakunk ki átfedés nélkül.Tudva, hogy a háromszöglapok illetve a négyzetlapok oldalainak hossza nem feltétlenül azonos, határozd meg az n lehetséges értékeit.

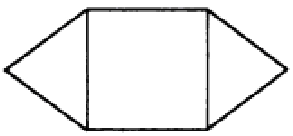
Róka Sándor, Nyíregyháza

Megoldás:

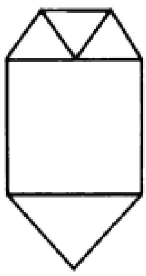
$n \in \{3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ esetén van olyan *n* oldalú konvex sokszög, mely a kívánt módon kirakható.



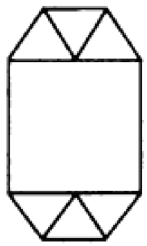
$n = 5$



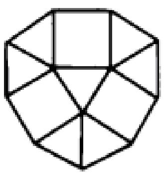
$n = 6$



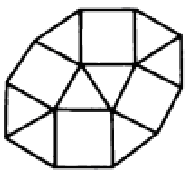
$n = 7$



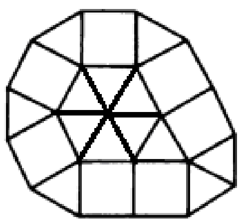
$n = 8$



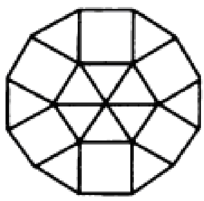
$n = 9$



$n = 10$



$n = 11$



$n = 12$

Ha egy konvex sokszöget az elvárt módon rakunk ki négyzetekből és szabályos háromszögekből, akkor a kirakott sokszög belső szögeinek mértéke $60°, 90°, 120°$ vagy $150°$ lehet, emiatt a külső szögek legalább $30°$-osak. A sokszög külső szögeinek összege $360°$, azaz $n \cdot 30° \le 360°$,
tehát $n \le 12$.

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

I. forduló – 11-12. osztály

4. feladat: Adott az $A=\{1,3,5,7,9\ldots,2017\}$ halmaz. Legalább hány elemet kell kiválasztani az A halmaz elemei közül, hogy a kiválasztott elemek között legyen legalább két elem, amelyek hányadosa 7 többszöröse?

Mátéfi István, Marosvásárhely

Megoldás:

Az A halmaz elemeiből olyan részhalmazokat képezünk, amelyek $\{p,7p,7^2p,7^3p,\ldots\}$ alakúak.

Ha $p\in\{1,3,5\}$, akkor felírhatóak a $\{p,7p,7^2p,7^3p\}$ halmazok.

Ha $p\in\{9,11,13,\ldots,41\}\setminus\{21,35\}$, akkor a keresett halmaz $\{p,7p,7^2p\}$ alakúak.

Ha $p\in\{43,45,47,\ldots,285\}\setminus\{7k\,|\,k\in\{7,9,11,\ldots,39\}\}$, akkor a keresett halmaz $\{p,7p\}$ alakú.

A fentiekben felsoroltunk 3 olyan részhalmazt, amelynek 4 eleme van, 15 olyan részhalmazt, amelynek 3 eleme van, 105 olyan részhalmazt, amelynek 2 eleme van, tehát összesen 267 elem található a fenti halmazokban, maradt 742 elem.
A 742 elem bármely két elemének hányadosa nem lehet 7 többszöröse.
Ha kiválasztjuk az 742 elemet és egy-egy elemet a kételemű a háromelemű illetve a négyelemű halmazokból, akkor a kiválasztott elemek száma 865 és ezek közül bármely két elem hányadosa nem többszöröse 7-nek.
A továbbiakban, ha bármely elemet választjuk, akkor a kiválasztott elemek között biztosan van két elem, amelyek hányadosa 7 többszöröse.
Tehát legalább 866 elemet kell kiválasztani.

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

I. forduló – 11-12. osztály

5. feladat: Adottak az $a,b\in\mathbb{C}$ úgy, hogy $\left|a^k+b^k\right|\le 2$, $\forall k\in\{3,5,7,\ldots,2n+1\}$, $n\in\mathbb{N}^*$ és $|a\cdot b|\le 1$. Igazold, hogy $|a+b|\le 2$.

Dr.Bencze Mihály, Bukarest

Megoldás:

Newton binomiális tételét alkalmazva kapjuk, hogy:

$$(a+b)^{2n+1}=C_{2n+1}^{0}a^{2n+1}+C_{2n+1}^{1}a^{2n}b+C_{2n+1}^{2}a^{2n-1}b^2+\ldots+C_{2n+1}^{2n}ab^{2n-1}+C_{2n+1}^{2n+1}b^{2n+1}$$

Felhasználva a $C_{2n+1}^{k}=C_{2n+1}^{2n+1-k},\forall k=\overline{0,n}$ egyenlőségeket felírhatjuk, hogy:

$$(a+b)^{2n+1}=a^{2n+1}+b^{2n+1}+C_{2n+1}^{1}\left(a^{2n}b+ab^{2n}\right)+C_{2n+1}^{2}\left(a^{2n-1}b^2+a^2b^{2n-1}\right)+\ldots+C_{2n+1}^{n}\left(a^{n+1}b^n+a^nb^{n+1}\right)$$

ahonnan

$$(a+b)^{2n+1}=a^{2n+1}+b^{2n+1}+C_{2n+1}^{1}\left(a^{2n-1}+b^{2n-1}\right)ab+C_{2n+1}^{2}\left(a^{2n-3}+b^{2n-3}\right)a^2b^2+\ldots+C_{2n+1}^{n}(a+b)a^nb^n.$$

Alkalmazva a $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|,\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$, $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|,\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$ összefüggéseket kapjuk, hogy: $|a+b|^{2n+1}\le\left|a^{2n+1}+b^{2n+1}\right|+C_{2n+1}^{1}\left|a^{2n-1}+b^{2n-1}\right||ab|+\ldots+C_{2n+1}^{n}|a+b|\left|a^nb^n\right|$.

Jelölje $r=|a+b|\ge 0$, a fenti egyenlőtlenségből következik

$r^{2n+1}\le 2+2\cdot C_{2n+1}^{1}+2\cdot C_{2n+1}^{2}+\ldots+2\cdot C_{2n+1}^{n-1}+r\cdot C_{2n+1}^{n}$, felhasználva a

$C_{2n+1}^{0}+C_{2n+1}^{1}+C_{2n+1}^{2}+\ldots+C_{2n+1}^{n}=2^{2n}$ azonosságot kapjuk, hogy

$r^{2n+1}-2^{2n+1}+2C_{2n+1}^{n}-r\cdot C_{2n+1}^{n}\le 0$, ahonnan

$(r-2)\left(r^{2n}+2r^{2n-1}+4r^{2n-2}+8r^{2n-3}+\ldots+2^{2n-1}r+2^{2n}-C_{2n+1}^{n}\right)\le 0$, de mivel $2^{2n}-C_{2n+1}^{n}>0$ és

$r^{2n}+2r^{2n-1}+4r^{2n-2}+8r^{2n-3}+\ldots+2^{2n-1}r\ge 0$ kapjuk, hogy $r-2\le 0$ vagyis $|a+b|\le 2$.

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

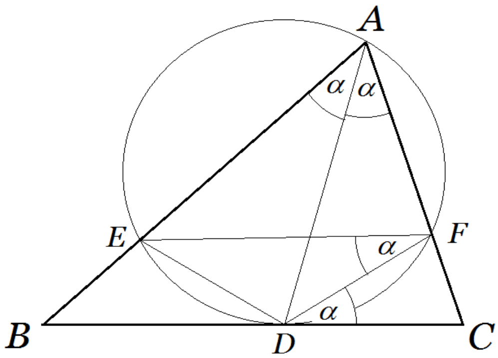
I. forduló – 11-12. osztály

6. feladat: Az ABC háromszögben $AB = n+2$, $BC = n+1$, $AC = n$, ahol $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ és $(AD$ szögfelező. Az A csúcson átmenő kör a BC oldalt a D pontban érinti, és az AB és AC oldalakat az E illetve F pontokban metszi.

a) Mutasd ki, hogy $EF \parallel BC$!
b) Számítsd ki az EF szakasz hosszát!

Róka Sándor, Nyíregyháza

Megoldás:



a) $(AD$ szögfelező $\Rightarrow m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{CAD}) = u°$ (1)

$m(\widehat{EAD}) = m(\widehat{EFD}) = u°$ (kerületi szögek) (2)

$m(\widehat{CAD}) = m(\widehat{FDC}) = u°$(kerületi szögek) (3)

Az (1), (2), (3) $\Rightarrow \widehat{EFD} \equiv \widehat{FDC} \Rightarrow EF \parallel BC$ (belső váltó szögek).

b) Felhasználva a szögfelező tételét kapjuk, hogy:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{n+2}{n} = \frac{BD}{n+1-BD} \Rightarrow BD = \frac{n+2}{2} \quad (4)$$

Mivel $BDE\Delta \sim BAD\Delta \Rightarrow BD^2 = BE \cdot BA$

$$\overset{(4)}{\Rightarrow} BE = \frac{n+2}{4} \Rightarrow AE = \frac{3}{4}(n+2) \quad (5)$$

Alkalmazva a hasonlóság alaptételét az ABC háromszögben $\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC}$

$$\overset{(5)}{\Rightarrow} EF = \frac{3}{4}(n+1).$$