XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

II. forduló - 9. osztály

1. feladat:

Az ABC háromszög oldalainak hossza rendre az a, b, c pozitív valós számok. Ha fennáll az $\frac{a}{\sqrt{6}}+\frac{b}{\sqrt{3}}+\frac{c}{\sqrt{2}}\geq\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ egyenlőtlenség, igazold, hogy a háromszög derékszögű!

Vass Csilla, Sepsiszentgyörgy

Megoldás:

$$\frac{a}{\sqrt{6}}+\frac{b}{\sqrt{3}}+\frac{c}{\sqrt{2}}\geq\sqrt{a^2+b^2+c^2}\Leftrightarrow a+b\sqrt{2}+\sqrt{3}c\geq\sqrt{6}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}\quad(1)$$

Alkalmazva a Cauchy-Bunyakovskij-Schwarz egyenlőtlenséget következik, hogy:

$$\left(a+b\sqrt{2}+\sqrt{3}c\right)^2\leq\left(1^2+\sqrt{2}^2+\sqrt{3}^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)\Leftrightarrow a+b\sqrt{2}+\sqrt{3}c\leq\sqrt{6}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}\quad(2)$$

(1), (2) $\Rightarrow a+b\sqrt{2}+\sqrt{3}c=\sqrt{6}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Mivel a Cauchy-Buniakovski-Schwarz egyenlőtlenségben, egyenlőség áll fenn következik, hogy: $\frac{a}{1}=\frac{b}{\sqrt{2}}=\frac{c}{\sqrt{3}}=\alpha>0$ ahonnan $a=\alpha,\ b=\alpha\sqrt{2}$ és $c=\alpha\sqrt{3}$.

Mivel $\alpha^2+\left(\alpha\sqrt{2}\right)^2=\left(\alpha\sqrt{3}\right)^2\Rightarrow a^2+b^2=c^2$ tehát az ABC háromszög derékszögű C-ben.

Megjegyzés: A feladat teljes négyzetek kialakításával is megoldható.

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

II. forduló - 9. osztály

2. feladat:

Az *ABC* háromszög *AB* és *AC* oldalát felosztjuk *n* egyenlő részre, $n \geq 2$. Az osztópontokat az *A*-tól kiindulva az *AB* oldalon B_1, B_2, ..., B_{n-1}, illetve az *AC* oldalon C_1, C_2, ..., C_{n-1}-el jelöljük.

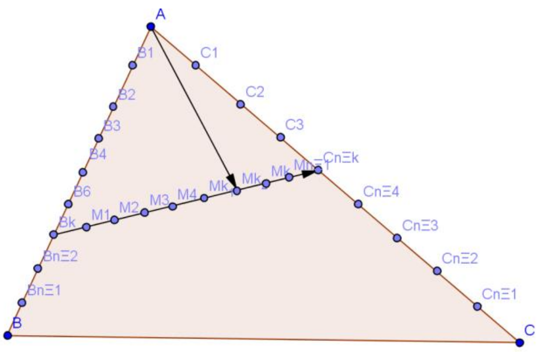
a) Igazold, hogy a $\overrightarrow{B_1C_{n-1}} + \overrightarrow{B_2C_{n-2}} + ... + \overrightarrow{B_{n-1}C_1}$ összegvektor és a $\overrightarrow{BC}$ vektor kollineáris.

b) A $[B_1C_{n-1}]$ szakaszon felvesszük az M_1 pontot, a $[B_2C_{n-2}]$-n az M_2 pontot, … , a $[B_{n-1}C_1]$ szakaszon pedig az M_{n-1} pontot úgy, hogy $\frac{B_kM_k}{M_kC_{n-k}} = \frac{k}{n-k}$, bármely $k = \overline{1, n-1}$ esetén. Határozd meg a $\sum_{k=1}^{n-1} \overrightarrow{AM_k}$ összeget.

Mészár Julianna, Nagyszalonta

Megoldás:

a)



$$\overrightarrow{B_kC_{n-k}} = \frac{n-k}{n}\overrightarrow{AC} - \frac{k}{n}\overrightarrow{AB}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\overrightarrow{B_kC_{n-k}} = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{n}\overrightarrow{AC} - \frac{k}{n}\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AC}\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{n} - \overrightarrow{AB}\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n} = \frac{n-1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

Tehát az összegvektor kollineáris a $\overrightarrow{BC}$ vektorral.

b) $$\overrightarrow{AM_k} = \frac{n-k}{n}\cdot\frac{k}{n}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{n}\cdot\frac{n-k}{n}\overrightarrow{AC}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\overrightarrow{AM_k} = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{(n-k)k}{n^2}\overrightarrow{AB} + \frac{k(n-k)}{n^2}\overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n-k)k}{n^2} = \frac{\left(n^2-1\right)}{6n}\cdot\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$$

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

II. forduló - 9. osztály

3. feladat:

Adott az $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ sorozat úgy, hogy $a_1 = 0,\ a_2 = 1$ és az $a_n,\ a_{n+1},\ a_{n+2}$ számok minden n páratlan számra számtani haladványban és minden n páros számra mértani haladványban vannak. Igazold, hogy $\sum_{k=2}^{n} \frac{k^2}{a_{2k-1} \cdot a_{2k}} = \frac{n-1}{n}$.

dr. Bencze Mihály, Bukarest

Megoldás:

Kiszámítjuk a sorozat $a_3 = 2, a_5 = 6,\ a_7 = 12,\ a_9 = 20$ páratlan és

$a_4 = 4, a_6 = 9,\ a_8 = 16$ páros indexű néhány tagját.

Észrevesszük, hogy $a_{2n-1} = (n-1)n,\ a_{2n} = n^2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Matematikai indukció módszerével kapjuk:

Ellenőrizzük $k = 1$-re $a_1 = 0,\ a_2 = 1$-igaz

Feltételezzük, k-ra igaz: $a_{2k-1} = (k-1)k,\ a_{2k} = k^2$

Bizonyítjuk k+1-re : $a_{2k+1} = k(k+1),\ a_{2k+2} = (k+1)^2$.

$$a_{2k+1} = 2a_{2k} - a_{2k-1} = 2k^2 - (k-1)k = k^2 + k = k(k+1)$$

$$a_{2k+2} = \frac{a_{2k+1}^2}{a_{2k}} = \frac{k^2(k+1)^2}{k^2} = (k+1)^2$$

Tehát $\sum_{k=2}^{n} \frac{k^2}{a_{2k-1} \cdot a_{2k}} = \sum_{k=2}^{n} \frac{k^2}{(k-1)k^3} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{n-1}{n}$.

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

II. forduló - 9. osztály

4. feladat:

Igazold, hogy $\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{3}\right]+\left[\sqrt{5}\right]+\left[\sqrt{7}\right]+...+\left[\sqrt{4n^2+4n-1}\right]=\frac{n(n+1)(8n+1)}{3}$, bármely $n\in\mathbb{N}^*$, ahol $[x]$ az x valós szám egész részét jelöli.

dr. Bencze Mihály, Bukarest

Megoldás:

Észrevesszük, hogy az összegben az egészrész értelmezése alapján 2 darab 1-es, 2 darab 2-es, 4 darab 3-as, 4 darab 4-es, 6 darab 5-ös, 6 darab 6-os és így tovább, 2*n* darab (2*n*-1)-es és 2*n* darab 2*n*-es szám szerepel.

Valóban $2k-1$ lesz az egészrésze a $\sqrt{4k^2-4k+1},\sqrt{4k^2-4k+3},\ldots,\sqrt{4k^2-1}$ számoknak, és ezekből $\frac{4k^2-1-\left(4k^2-4k+1\right)}{2}+1=2k-1+1=2k$ darab van.

Hasonlóan $2k$ lesz az egészrésze a $\sqrt{4k^2+1},\sqrt{4k^2+3},\ldots,\sqrt{4k^2+4k-1}$ számoknak és ezekből $\frac{4k^2+4k-1-\left(4k^2+1\right)}{2}+1=2k-1+1=2k$ darab van.

Így az összeg: $2\cdot1+2\cdot2+4\cdot3+4\cdot4+6\cdot5+6\cdot6+\ldots+2n\cdot(2n-1)+2n\cdot2n=$

$$=2(1+2)+4(3+4)+6(5+6)+\ldots+2n(2n-1+2n)=\sum_{k=1}^{n}2k(4k-1)=8\sum_{k=1}^{n}k^2-2\sum_{k=1}^{n}k=$$

$$=8\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-2\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(8n+1)}{3}.$$

Megjegyzés: A feladat a matematikai indukció módszerével is igazolható.