XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

II. forduló - 10. osztály

1. feladat:

Oldd meg a következő egyenletet:

$$8^x + 27^x + 2\cdot 30^x + 54^x + 60^x = 12^x + 18^x + 20^x + 24^x + 45^x + 90^x$$

Kovács Béla, Szatmárnémeti

Megoldás:

A számokat törzstényezőkre bontjuk és alkalmazzuk a hatványok tulajdonságait.

$$2^{3x} + 3^{3x} + 2\cdot 2^x \cdot 3^x \cdot 5^x + 2^x \cdot 3^{3x} + 2^{2x} \cdot 3^x \cdot 5^x =$$

$$2^{2x}\cdot 3^x + 2^x \cdot 3^{2x} + 2^{2x}\cdot 5^x + 2^{3x}\cdot 3^x + 3^{2x}\cdot 5^x + 2^x \cdot 3^{2x}\cdot 5^x$$

Használva a $2^x = a$, $3^x = b$, $5^x = c$ jelöléseket átrendezzük az egyenletet és szorzatot alakítunk ki.

$$a^3 + b^3 + 2abc + ab^3 + a^2bc = a^2b + ab^2 + a^2c + a^3b + b^2c + ab^2c$$

$a - b$ szorzótényezőt próbálunk kialakítani.

$$a^3 - a^2b + b^3 - ab^2 + 2abc - a^2c - b^2c + ab^3 - a^3b + a^2bc - ab^2c = 0$$

$$a^2(a-b) - b^2(a-b) - c(a-b)^2 - ab(a^2 - b^2) + abc(a-b) = 0$$

$$(a-b)(a^2 - b^2 - ac + bc - a^2b - ab^2 + abc) = 0$$

A második zárójelben az a + b – c tényezőt alakítjuk ki.

$$(a-b)(a^2 + ab - ac - b^2 - ab + bc - a^2b - ab^2 + abc) = 0$$

$$(a-b)(a(a+b-c) - b(b+a-c) - ab(a+b-c)) = 0$$

$(a-b)(a+b-c)(a-b-ab) = 0$, ami csak az alábbi esetekben teljesül:

1) $a - b = 0$ esetben kapjuk, hogy $2^x = 3^x$ vagyis $x = 0$.

2) $a + b = c$ esetben kapjuk, hogy $2^x + 3^x = 5^x$ vagyis $\left(\frac{2}{3}\right)^x + 1 = \left(\frac{5}{3}\right)^x$.

Mivel a baloldali szigorúan csökkenő és a jobboldali szigorúan növekvő függvény, következik, hogy $x = 1$ az egyetlen megoldás.

3) $a - b = ab$ esetben kapjuk, hogy $2^x - 3^x = 6^x$ vagyis $\left(\frac{2}{3}\right)^x - 1 = 2^x$.

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

II. forduló - 10. osztály

Mivel a baloldali szigorúan csökkenő és a jobboldali szigorúan növekvő függvény, következik, hogy $x = -1$ az egyetlen megoldás.

Az adott egyenlet megoldáshalmaza: $\{-1, 0, 1\}$.

2. feladat:

Igazold, hogy ha $a_k > 1,\ k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ és

$$t = \frac{a_1^2}{(n-1)a_2 + a_3} + \frac{a_2^2}{(n-1)a_3 + a_4} + \ldots + \frac{a_n^2}{(n-1)a_1 + a_2}, \text{ akkor } \sum_{k=1}^{n} \log_{a_k} t \geq n$$

Dr.Bencze Mihály, Bukarest

Megoldás:

Használva a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenséget:

$$t = \sum \frac{a_1^2}{(n-1)a_2 + a_3} \geq \frac{\left(\sum a_1\right)^2}{\sum\left((n-1)a_2 + a_3\right)} = \frac{\left(\sum a_1\right)^2}{n \sum a_1} = \frac{1}{n} \sum a_1 \geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}$$

kapjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} \log_{a_k} t \geq \sum_{k=1}^{n} \log_{a_k} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \log_{a_k} (a_1 a_2 \ldots a_n) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\log_{a_k} a_1 + \log_{a_k} a_2 + \ldots + \log_{a_k} a_n\right) \geq \frac{1}{n} n^2 \cdot \sqrt[n^2]{\prod_{1 \leq i, j \leq n} \log_{a_i} a_j} = n$$

3. feladat:

Az $ABCDEF$ hatszög oldalaira kívülre egyenlő oldalú háromszögeket szerkesztünk, amelyeknek a középpontjait rendre M, N, O, P, Q és R-rel jelöljük, ahol M az EF oldalra szerkesztett háromszög középpontja. Igazold, hogy az NPR és OQM háromszögek súlypontjai akkor és csakis akkor esnek egybe, ha az ACE és BDF háromszögek súlypontjai is egybeesnek.

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

II. forduló - 10. osztály

Megoldás:

Jelöljük a pontok affixumait a megfelelő kisbetűvel. Legyen N az AF oldalra kivülről szerkesztett egyenlőoldalú háromszög középpontja. A háromszög legyen például FAG. Akkor az FA szakasznak az F körüli $60°$-os forgatásával megkapjuk az FG szakaszt, vagyis $g-f=\varepsilon(a-f)$, ahol $\varepsilon=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

Tehát $g=f+\varepsilon(a-f)$.

Innen megkapjuk a FAG háromszög súlypontját, legyen ennek a neve például N . Akkor az affixuma:

$$n=\frac{a+f+\varepsilon(a-f)}{3}\ .$$

A cirkuláris permutáció elve alapján kapjuk a többi középpont affixumát is:

$o=\dfrac{b+a+\varepsilon(b-a)}{3}$, $p=\dfrac{c+b+\varepsilon(c-b)}{3}$, $q=\dfrac{d+c+\varepsilon(d-c)}{3}$, $r=\dfrac{e+d+\varepsilon(e-d)}{3}$ és

$$m=\frac{f+e+\varepsilon(f-e)}{3}.$$

Akkor NPR háromszög súlypontja: $\dfrac{a+f+c+b+e+d+\varepsilon(a-f+c-b+e-d)}{9}$

és az OQM háromszög súlypontjai pedig: $\dfrac{b+a+d+c+f+e+\varepsilon(b-a+d-c+f-e)}{9}$.

Ezek pedig akkor és csakis akkor egyenlőek, ha $a-f+c-b+e-d=b-a+d-c+f-e$

vagyis $a+c+e=b+d+f$ ami a $\dfrac{a+c+e}{3}=\dfrac{b+d+f}{3}$ felírásban pontosan az ACE és BDF súlypontjainak egybeesését jelenti.

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

II. forduló - 10. osztály

4. feladat:

Mutasd ki, hogy bármely *ABC* háromszögben fennáll az alábbi egyenlőtlenség:

$a \cdot m_a + b \cdot m_b \leq \dfrac{\sqrt{(a^2+b^2+4c^2)(a^2+b^2)}}{2}$, ahol m_a, m_b az a, illetve b oldalakhoz tartozó oldalfelező hosszát jelöli. Mikor áll fenn az egyenlőség?

Zákány Mónika, Nagybánya

Megoldás: Alkalmazzuk Cauchy- Bunyakovszkij- Schwarz egyenlőtlenséget az a, b, valamint m_a, m_b számokra:

$$\left(m_a{}^2 + m_b{}^2\right) \cdot \left(a^2 + b^2\right) \geq \left(a \cdot m_a + b \cdot m_b\right)^2.$$

Tudjuk, hogy $m_a{}^2 = \dfrac{2(b^2+c^2) - a^2}{4}$.

Ezt felhasználva kapjuk:

$$\left(\frac{2(b^2+c^2) - a^2 + 2(a^2+c^2) - b^2}{4}\right) \cdot \left(a^2 + b^2\right) \geq \left(a \cdot m_a + b \cdot m_b\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$\frac{a^2+b^2+4c^2}{4} \cdot \left(a^2 + b^2\right) \geq \left(a \cdot m_a + b \cdot m_b\right)^2$$

Négyzetgyököt vonva a kapott egyenlőtlenségből, kapjuk:

$$a \cdot m_a + b \cdot m_b \leq \frac{\sqrt{(a^2+b^2+4c^2)(a^2+b^2)}}{2}$$

Egyenlőség akkor áll fenn, amikor a Cauchy- Bunyakovszkij- Schwarz egyenlőtlenségben is, vagyis:

$\dfrac{a}{m_a} = \dfrac{b}{m_b}$, ez a feltétel pontosan az egyenlő szárú háromszög esetén teljesül.

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

II. forduló - 10. osztály

Valóban, az egyenlőségi feltétel így alakul: $\frac{a^2}{b^2} = \frac{{m_a}^2}{{m_b}^2}$ és

$a^4 + a^2c^2 = b^4 + b^2c^2 \Leftrightarrow \left(a^2 - b^2\right)\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = 0 \Leftrightarrow a = b$.

Tehát egyenlő szárú háromszög esetén áll fenn az egyenlőség.