XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

II. forduló - 11. osztály

1. feladat: Tekintsük az összes olyan $A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le 3\\ 1\le j\le 3}}$ harmadrendű négyzetes mátrixot, amelyben $a_{ij}\in\{-2,2\}$ bármely $i, j\in\{1,2,3\}$ esetén. Ezen mátrixok halmazát jelöljük H -val.

a) Igazold, hogy minden H -beli mátrix determinánsa osztható 32 -vel!

b) Bizonyítsd be, hogy H -ban létezik legalább 171 olyan mátrix, amelyeknek determinánsai egyenlőek!

Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy

Megoldás:

a) Nyilvánvaló, hogy minden H -beli mátrix egész elemű, ezért determinánsaik is egész számok. Tehát értelme van az oszthatósági kérdés felvetésének.

Tekintsünk egy tetszőleges H -beli A mátrixot. A $\det(A)$ első sorát rögzítjük (melyben 2 és/vagy -2 szerepel csupán) és ezt rendre adjuk hozzá a második illetve a harmadik sorhoz. Ekkor a második és harmadik soron a $0,4$ vagy -4 számok szerepelhetnek. Így $\det(A)$-nak az első sorából kiemelhetünk közös tényezőként 2 -t, míg a második illetve a harmadik sorból 4 -et, tehát a teljes determinánsból, $2\cdot 4\cdot 4=32$-t úgy, hogy a kiemelés után maradt determináns elemei $0,-1,1$ egészek, így a determináns értéke is egész szám. Ezzel bizonyítottuk, hogy tetszőleges H -beli A mátrix determinánsa osztható 32 -vel.

b) A fenti gondolatmenetet folytatva: tetszőleges $A\in H$ esetén, $\det(A)$ determinánst háromszögszabállyal kifejtve 6 darab háromtényezős szorzat algebrai összegét kapjuk, ahol a tényezők 2 és/vagy -2.

Így $-48=6\cdot(-2)^3\le\det(A)\le 6\cdot 2^3=48$ és $\det(A)$ egész szám. Az a) alpontban bizonyított oszthatóságot is figyelembe véve azt kaptuk, hogy $\det(A)$ olyan 32 -vel osztható egész szám, amelyik a $[-48,48]$ intervallumban van. Ilyen szám csak három létezik, éspedig: $-32,0$ és 32.

Mindhárom megvalósulhat determinánsértékként, például:

$$\begin{vmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&-2\end{vmatrix}=0\ ,\ \begin{vmatrix}2&2&-2\\2&-2&2\\2&2&2\end{vmatrix}=-32 \text{ és } \begin{vmatrix}-2&-2&2\\2&-2&2\\2&2&2\end{vmatrix}=32$$

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

II. forduló - 11. osztály

Tehát $\forall A \in H$ esetén $\det A \in \{-32, 0, 32\}$. Másrészt: H-ban összesen $2^9 = 512$ mátrix van. Ha a H-beli mátrixok közül legfennebb 170-nek lenne ugyanaz a szám a determinánsa, akkor legfennebb $3\cdot 170 = 510$ mátrixról lehetne szó, ami ellentmond annak, hogy H számossága 512. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

2. feladat: Igazold, hogy ha $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, akkor

$$\frac{8}{3}\det\left(A^2 + A + I_2\right) \geq \left(1 - \det(A)\right)^2 + \left(1 + \operatorname{Tr}(A)\right)^2$$

dr.Bencze Mihály, Bukarest

Megoldás: Legyen $P(x) = \det(A - xI_2) = x^2 - ax + b$, ahol $a = \operatorname{Tr}(A)$, $b = \det(A)$.

Másrészt $\det\left(A^2 + A + I_2\right) = \det\left(\left(A - \varepsilon I_2\right)\left(A - \varepsilon^2 I_2\right)\right) = P(\varepsilon)\cdot P\left(\varepsilon^2\right)$, ahol $\varepsilon^3 = 1$, $\varepsilon \neq 1$.

Így $\det\left(A^2 + A + I_2\right) = \left(\varepsilon^2 - a\varepsilon + b\right)\left(\varepsilon - a\varepsilon^2 + b\right) = a^2 + ab + a + b^2 - b + 1.$

Tehát a bizonyítandó egyenlőtlenség egyenértékű az alábbival:

$$8\left(a^2 + ab + a + b^2 - b + 1\right) - 3(1 - b)^2 - 3(1 + a)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 4(b + a)^2 + (b - 1)^2 + (a + 1)^2 \geq 0$$

3. feladat: Egy 1×1-es téglalap (egységnyi oldalú négyzet) átlójára szerkesztünk egy téglalapot, amelynek hosszúsága megegyezik az előző téglalap átlójának a hosszával, szélessége pedig egységnyi. Folytatjuk a szerkesztést a következő módon: a keletkezett téglalap átlójára szerkesztünk egy újabb téglalapot, amelynek hosszúsága megegyezik a téglalap átlójának a hosszával, szélessége pedig az előző téglalap átlójának hosszával. A műveletet *n*-szer ismételjük. Jelölje T_n az n-edik téglalap területét, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{T_n}{T_{n-1}}$ határértéket!

b) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{T_k^2}\right)$ határértéket!

Pálhegyi–Farkas László, Nagyvárad és Mészár Julianna, Nagyszalonta

Megoldás:

a) A téglalapok átlóit Pitagorász tételével kiszámolva, a következő sorozathoz jutunk: $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{13}, \ldots$ Észrevesszük, hogy ezek a Fibonacci sorozat tagjainak a négyzetgyökei a harmadik tagtól kezdve: $\sqrt{F_n} = \sqrt{\left(\sqrt{F_{n-1}}\right)^2 + \left(\sqrt{F_{n-2}}\right)^2} = \sqrt{F_{n-1} + F_{n-2}}$, $n \geq 3$.

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

II. forduló - 11. osztály

Megjegyzés: $F_0 = 0, F_1 = 1,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \forall n \in \mathbb{N}$

A keresett területek: $T_1 = \sqrt{F_1 F_2}, T_2 = \sqrt{F_2 F_3}, T_3 = \sqrt{F_3 F_4}, \dots, T_n = \sqrt{F_n \cdot F_{n+1}}, n \geq 1$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{T_n}{T_{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{F_n \cdot F_{n+1}}}{\sqrt{F_{n-1}\cdot F_n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{F_{n+1}}{F_{n-1}}} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (az aranymetszet száma).

b) A határérték kiszámításánál felhasználjuk a Fibonacci sorozat általános tagjának az

alakját: $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n}{2^n} - \dfrac{\left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2^n}\right), n \geq 1.$

Egyrészt evidens, hogy $T_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$ másrészt igaz az úgynevezett Cassini azonosság:

$F_{n-1}\cdot F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$, ezért

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{T_k^2} = \sum_{k=2}^{n} \frac{F_k^2 - F_{k-1}\cdot F_{k+1}}{F_k \cdot F_{k+1}} = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{F_k}{F_{k+1}} - \frac{F_{k-1}}{F_k}\right) = \frac{F_2}{F_3} - \frac{F_1}{F_2} + \frac{F_3}{F_4} - \frac{F_2}{F_3} + \ldots + \frac{F_n}{F_{n+1}} - \frac{F_{n-1}}{F_n} =$$
$$= \frac{F_n}{F_{n+1}} - \frac{F_1}{F_2} = \frac{F_n}{F_{n+1}} - 1$$

Akkor: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{T_k^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{F_n}{F_{n+1}}\right) = \dfrac{2}{1+\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

A Cassini azonosság igazolása:

Tudjuk, hogy $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ $\forall\, n \geq 1$ (indukcióval azonnal igazolható).

Számítsuk ki a determinánsukat és tegyük egyenlővé:

$$\det\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n\right] = \left(\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)^n = (-1)^n = \begin{vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{vmatrix} = F_{n+1}\cdot F_{n-1} - F_n^2.$$

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

II. forduló - 11. osztály

4. feladat: Legyen $x_{n+1} = x_n - x_n^{2017}$, $x_1 \in (0,1)$ bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

a) Igazold, hogy az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat konvergens, és számítsd ki a határértékét!

b) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_1^{2017} + x_2^{2017} + \ldots + x_n^{2017}\right)$ határértéket!

c) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2016]{n} \cdot x_n$ határértéket!

dr.Bencze Mihály, Bukarest

Megoldás:

a) A matematikai indukció módszerével igazoljuk, hogy $0 < x_n < 1$.

$x_{n+1} - x_n = -x_n^{2017} < 0 \Rightarrow x_{n+1} < x_n$ vagyis x_n szigorúan csökkenő és korlátos, tehát konvergens.

Legyen $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \Rightarrow \lambda = \lambda - \lambda^{2017} \Rightarrow \lambda = 0$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_1^{2017} + x_2^{2017} + \ldots + x_n^{2017}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left((x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + \ldots + (x_n - x_{n+1})\right) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}(x_1 - x_{n+1}) = x_1$.

c) Mivel $(x_n)_{n\geq 1}$ szigorúan csökken a 0-hoz, következik, hogy $\left(\frac{1}{x_n^{2017}}\right)_{n\geq 1}$ nővekvő és nem korlátos. Alkalmazva a Cesaro−Stolz- tételt következik:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2016]{n} \cdot x_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2016]{n \cdot x_n^{2016}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2016]{\frac{n}{\frac{1}{x_n^{2016}}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2016]{\frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}^{2016}} - \frac{1}{x_n^{2016}}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2016]{\frac{x_n^{2016} \cdot x_{n+1}^{2016}}{x_n^{2016} - x_{n+1}^{2016}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[2016]{\frac{x_n^{2016} \cdot x_n^{2016}\left(1 - x_n^{2016}\right)^{2016}}{x_n^{2016} - x_n^{2016}\left(1 - x_n^{2016}\right)^{2016}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2016]{\frac{x_n^{2016} \cdot \left(1 - x_n^{2016}\right)^{2016}}{1 - \left(1 - x_n^{2016}\right)^{2016}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[2016]{\frac{\left(1 - x_n^{2016}\right)^{2016}}{1 + \left(1 - x_n^{2016}\right) + \left(1 - x_n^{2016}\right)^2 + \ldots + \left(1 - x_n^{2016}\right)^{2015}}} = \frac{1}{\sqrt[2016]{2016}}.$$