# XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
# Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

## II. forduló - 11. osztály

**1. feladat:** Tekintsük az összes olyan $A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le 3\\ 1\le j\le 3}}$ harmadrendű négyzetes mátrixot, amelyben $a_{ij}\in\{-2,2\}$ bármely $i,j\in\{1,2,3\}$ esetén. Ezen mátrixok halmazát jelöljük $H$ -val.

**a)** Igazold, hogy minden $H$ -beli mátrix determinánsa osztható $32$ -vel!

**b)** Bizonyítsd be, hogy $H$ -ban létezik legalább $171$ olyan mátrix, amelyeknek determinánsai egyenlőek!

*Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy*

**2. feladat:** Igazold, hogy ha $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, akkor

$$\frac{8}{3}\det\left(A^2+A+I_2\right)\ge\left(1-\det(A)\right)^2+\left(1+\operatorname{Tr}(A)\right)^2$$

*dr.Bencze Mihály, Bukarest*

**3. feladat:** Egy $1\times 1$-es téglalap (egységnyi oldalú négyzet) átlójára szerkesztünk egy téglalapot, amelynek hosszúsága megegyezik az előző téglalap átlójának a hosszával, szélessége pedig egységnyi. Folytatjuk a szerkesztést a következő módon: a keletkezett téglalap átlójára szerkesztünk egy újabb téglalapot, amelynek hosszúsága megegyezik a téglalap átlójának a hosszával, szélessége pedig az előző téglalap átlójának hosszával. A műveletet *n*-szer ismételjük. Jelölje $T_n$ az $n$ -edik téglalap területét, $n\in\mathbb{N}^*$.

**a)** Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{T_n}{T_{n-1}}$ határértéket!

**b)** Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{T_k^2}\right)$ határértéket!

*Pálhegyi–Farkas László, Nagyvárad és Mészár Julianna, Nagyszalonta*

**4. feladat:** Legyen $x_{n+1}=x_n-x_n^{2017}$, $x_1\in(0,1)$ bármely $n\in\mathbb{N}^*$ esetén.

**a)** Igazold, hogy az $\left(x_n\right)_{n\ge 1}$ sorozat konvergens, és számítsd ki a határértékét!

**b)** Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_1^{2017}+x_2^{2017}+\ldots+x_n^{2017}\right)$ határértéket!

**c)** Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2016]{n}\cdot x_n$ határértéket!

*dr.Bencze Mihály, Bukarest*

Megjegyzések:
- munkaidő 3 óra;
- minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér;
- lényeges általánosításokért és az elsőtől lényegesen különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont jár