XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

II. forduló - 12. osztály

1. feladat: Legyen $M=\left\{\frac{k}{2n+1}\middle| k\in\{0,1,2,...,2n\}\right\}, n\in\mathbb{N}$ és $x*y=\{x+y\}$, ahol $\{a\}$ jelöli az a szám törtrészét. Mutasd ki, hogy $(M,*)$ Ábel féle csoport és $(M,*)\cong(\mathbb{Z}_{2n+1},+)$.

dr.Bencze Mihály, Bukarest

Megoldás: 1)

$\forall x,y\in M$ esetén, legyen $x=\frac{a}{2n+1}$ és $y=\frac{b}{2n+1}$, ahol $0\le a,b\le 2n; a,b\in\mathbb{N}$.

Ha $a+b\le 2n$, akkor $x*y=\left\{\frac{a+b}{2n+1}\right\}=\frac{a+b}{2n+1}\in M$.

Ha $2n+1\le a+b\le 4n\Rightarrow 0\le a+b-(2n+1)\le 2n-1$,tehát

$x*y=\left\{\frac{a+b}{2n+1}\right\}=\left\{1+\frac{a+b-(2n+1)}{2n+1}\right\}=\frac{a+b-(2n+1)}{2n+1}\in M$, mivel $\{x+n\}=\{x\},\forall n\in\mathbb{N}$ esetén. Tehát az *M* halmaz zárt a „$*$” műveletre nézve.

Asszociativitás:

$$(x*y)*z=\{x+y\}*z=\{\{x+y\}+z\}=\{x+y-[x+y]+z\}=\{x+y+z\},\ \forall x,y,z\in M$$

$$x*(y*z)=x*\{y+z\}=\{x+\{y+z\}\}=\{x+y+z-[y+z]\}=\{x+y+z\},\ \forall x,y,z\in M$$

Tehát a „*” művelet asszociatív.

A kommutativitás evidens.

Semleges elem létezése:

$\exists e\in M: x*e=x, x\in M\Rightarrow\{x+e\}=x,\forall x\in M\Rightarrow e=0\in M$ az *M* halmaz semleges eleme.

Szimetrizálhatóság:

$\forall x\in M\Rightarrow\exists x'\in M:\ x*x'=x'*x=0\Rightarrow\{x+x'\}=0\Rightarrow x+x'\in\left[0,\frac{4n}{2n+1}\right]\cap\mathbb{N}$.

Tehát, ha $x=0\Rightarrow x'=0\in M$, ha $x>0\Rightarrow x'=1-x\in M$.

A fentiekből következik, hogy $(M,*)$ Ábel féle csoport.

Az izomorfizmus igazolása:

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

II. forduló - 12. osztály

Tekintsük az $F : M \to \mathbb{Z}_{2n+1}$, $F\left(\frac{k}{2n+1}\right) = k$ függvényt.

Ha $F\left(\frac{k_1}{2n+1}\right) = F\left(\frac{k_2}{2n+1}\right)$, $0 \le k_1, k_2 \le 2n \Rightarrow \hat{k_1} = \hat{k_2} \Rightarrow k_1 = k_2$ osztva $2n+1$-gyel

$\Rightarrow \frac{k_1}{2n+1} = \frac{k_2}{2n+1}$. Amiből kapjuk, hogy F injektív.

$\forall\ k \in \mathbb{Z}_{2n+1} \Rightarrow t = \frac{k}{2n+1} \in M$, azaz $F(t) = k$, tehát F szürjektív is, azaz F bijektív.

Kimutatjuk, hogy $F(x * y) = F(x) + F(y), \forall x, y \in M$ esetén.

Ha $x = \frac{k_1}{2n+1} \in M$, $y = \frac{k_2}{2n+1}, 0 \le k_1, k_2 \le 2n$

Ha $k_1 + k_2 \le 2n \Rightarrow\ 0 \le \frac{k_1 + k_2}{2n+1} \le \frac{2n}{2n+1}$. Tehát $\frac{k_1 + k_2}{2n+1} \in M$ és

$$F(x * y) = F(\{x + y\}) = F\left(\left\{\frac{k_1 + k_2}{2n+1}\right\}\right) = k_1 + k_2 = k_1 + k_2 = F(x) + F(y).$$

Ha $2n+1 \le k_1 + k_2 \le 4n \Rightarrow 0 \le \frac{k_1 + k_2 - 2n - 1}{2n+1} \le \frac{2n-1}{2n+1}$, így $\frac{k_1 + k_2 - (2n+1)}{2n+1} \in M$.

Ezek szerint

$$F(x * y) = F(\{x + y\}) = F\left(\left\{\frac{k_1 + k_2}{2n+1}\right\}\right) = F\left(\left\{\frac{k_1 + k_2 - 2n - 1}{2n+1}\right\}\right) = k_1 + k_2 - 2n - 1 = k_1 + k_2 = F(x) + F(y).$$

Tehát $(M, *) \cong (\mathbb{Z}_{2n+1}, +)$

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

II. forduló - 12. osztály

2. feladat: Legyenek az $(A,*)$ és $(B,\circ)$ csoportok semleges elemei e, illetve u. Ha az $f:A\to B$ függvény rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

i. $\forall\ x,y\in A$ esetén $f(x*y)=f(x)\circ f(y)$ és

ii. $f(x)\neq u,\ \forall x\in A-\{e\}$ elemre,

igazold, hogy f injektív.

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

Megoldás: x' a szokásos módon jelentse az x inverz elemét.

Legyen először $x=y=e$, akkor $f(e)=f(e*e)=f(e)\circ f(e)$.

Másrészt $u=f'(e)\circ f(e)=f'(e)\circ\left(f(e)\circ f(e)\right)=\left(f'(e)\circ f(e)\right)\circ f(e)=u\circ f(e)=f(e)$.

Tehát $f(e)=u$ (1)

Legyen most $x\in A$ és $y=x'$, akkor $u=f(e)=f(x*x')=f(x)\circ f(x')$ innen következik, hogy $f(x')=f'(x),\quad \forall x\in A$ esetén. (2)

Legyen most $x\in A$ és y helyett legyen y'.

Akkor $f(x*y')=f(x)\circ f(y')=f(x)\circ f'(y)$, alkalmaztuk a (2)-es tulajdonságot.

Tehát $\forall\ x,y\in A$ esetén $f(x*y')=f(x)\circ f'(y)$ (3)

Az injektivítás igazolása:

Feltételezzük, hogy $f(x_1)=f(x_2)$, akkor $f(x_1)\circ f'(x_2)=f(x_2)\circ f'(x_2)=u$, innen $u=f(x_1)\circ f'(x_2)=f(x_1*x_2')$, alkalmaztuk a (3)-as tulajdonságot.

Tehát $f(x_1*x_2')=u$, amiből az igazolt (1)-es tulajdonság és a (2)-es feltétel alapján következik, hogy $x_1*x_2'=e$ lehet csak, azaz $x_1=x_2$.

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

II. forduló - 12. osztály

3. feladat: Adottak az $f_n : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}$, $f_n(x) = \frac{e^x \cdot \cos x \cdot \sin nx}{\sin x}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ függvények.

a) Számítsd ki: $\int \left(f_{2n+1}(x) - f_{2n-1}(x) \right) dx$.

b) Határozd meg az f_{2n+1} primitív függvényeinek a halmazát.

Mátéfi István, Marosvásárhely

Megoldás:

a) $$\int \left(f_{2n+1}(x) - f_{2n-1}(x) \right) dx = \int \frac{e^x \cdot \cos x \sin(2n+1)x}{\sin x} dx - \int \frac{e^x \cdot \cos x \sin(2n-1)x}{\sin x} dx =$$

$$\int \frac{e^x \cos x \left(\sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x \right)}{\sin x} dx = \int \frac{e^x \cos x \cdot 2 \sin x \cdot \cos 2nx}{\sin x} dx =$$

$$\int e^x 2 \cos x \cdot \cos 2nx dx = \int e^x \cdot \left(\cos(2n+1)x + \cos(2n-1)x \right) dx$$

De $\int e^x \cdot \cos \alpha x dx = \frac{e^x \cdot (\cos \alpha x + \alpha \sin \alpha x)}{1+\alpha^2} + \mathscr{C}$.

Tehát $\int \left(f_{2n+1}(x) - f_{2n-1}(x) \right) dx =$

$$\frac{e^x \cdot \left(\cos(2n+1)x + (2n+1)\sin(2n+1)x \right)}{1+(2n+1)^2} + \frac{e^x \cdot \left(\cos(2n-1)x + (2n-1)\sin(2n-1)x \right)}{1+(2n-1)^2} + \mathscr{C}$$

b) Legyen $k(2n+1) = \frac{e^x \cdot \left(\cos(2n+1)x + (2n+1)\sin(2n+1)x \right)}{1+(2n+1)^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int \left(f_{2n+1}(x) - f_{2n-1}(x) \right) dx = k(2n+1) + k(2n-1)$$

$$\int \left(f_{2n-1}(x) - f_{2n-3}(x) \right) dx == k(2n-1) + k(2n-3)$$

....

$$\int \left(f_3(x) - f_1(x) \right) dx = k(3) + k(1).$$

Összeadva kapjuk, hogy: $\int \left(f_{2n+1}(x) - f_1(x) \right) dx = k(2n+1) + k(2n-1) + \ldots + k(1) \Rightarrow$

$$\int f_{2n+1}(x) dx = k(2n+1) + k(2n-1) + \ldots + k(1) + \frac{e^x \cdot (\cos x + \sin x)}{2} + \mathscr{C}.$$

XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

II. forduló - 12. osztály

4. feladat: Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, függvény, amelyre igaz, hogy $\left(f\left(x\right)\right)^5+5^{f(x)}=x$, bármely $x\in\mathbb{R}$ esetén. Mutasd ki, hogy az f függvénynek van primitív függvénye.

dr.Bencze Mihály, Bukarest

Megoldás:

Legyen $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g\left(x\right)=x^5+5^x$.

Az $f^5\left(x\right)+5^{f(x)}=x$ összefüggés ekvivalens a $\mathrm{g}\left(f\left(x\right)\right)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ egyenlőséggel.

A g függvény driválható és $g'\left(x\right)=5x^4+5^x\ln 5>0\Rightarrow$ a g függvény szigorúan növekvő az $\mathbb{R}$ halmazon. Tehát g injektív.

Mivel a g függvény folytonos az $\mathbb{R}$ halmazon, következik, hogy Darboux tulajdonságú és $\lim\limits_{x\to-\infty} g\left(x\right)=-\infty$ és $\lim\limits_{x\to\infty} g\left(x\right)=\infty$, vagyis $g\left(\mathbb{R}\right)=\mathbb{R}$ tehát a g függvény szürjektív.

A fentiekből következik, hogy a g függvény bijektív, tehát invertálható.

Mivel $g\left(f\left(x\right)\right)=x\Rightarrow f\left(x\right)=g^{-1}\left(x\right)\Rightarrow$ az f függvény folytonos az $\mathbb{R}$ halmazon, tehát az f függvénynek van primitív függvénye.

.