XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

II. forduló - 12. osztály

1. feladat: Legyen $M = \left\{ \frac{k}{2n+1} \middle| k \in \{0,1,2,...,2n\} \right\}, n \in \mathbb{N}$ és $x * y = \{x+y\}$, ahol $\{a\}$ jelöli az a szám törtrészét. Mutasd ki, hogy $(M,*)$ Ábel féle csoport és $(M,*) \cong (\mathbb{Z}_{2n+1},+)$.

dr.Bencze Mihály, Bukarest

2. feladat: Adottak az $(A,*)$ és $(B,\circ)$ csoportok, amelyek semleges elemei e, illetve u.

Ha az $f : A \to B$ függvény rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

i. $\forall\ x, y \in A$ esetén $f(x*y) = f(x) \circ f(y)$ és

ii. $f(x) \neq u,\ \forall x \in A \setminus \{e\}$ elemre,

igazold, hogy f injektív.

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

3. feladat: Adottak az $f_n : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{e^x \cdot \cos x \cdot \sin nx}{\sin x}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ függvények.

a) Számítsd ki: $\int \left(f_{2n+1}(x) - f_{2n-1}(x) \right) dx.$

b) Határozd meg az f_{2n+1} primitív függvényeinek a halmazát.

Mátéfi István, Marosvásárhely

4. feladat: Adott az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, függvény, amelyre igaz, hogy $\left(f(x) \right)^5 + 5^{f(x)} = x$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén. Mutasd ki, hogy az f függvénynek van primitív függvénye.

dr.Bencze Mihály, Bukarest

Megjegyzések:
- munkaidő 3 óra;
- minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér;
- lényeges általánosításokért és az elsőtől lényegesen különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont jár